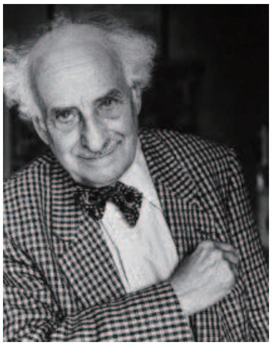
數學傳播 50卷2期, pp. 93-105

從拓樸學到數學教育：漢斯·弗賴登塔爾 (Hans Freudenthal) 對數學的洞察與反思

張　　勇

摘要: 荷蘭數學家弗賴登塔爾橫跨多個研究領域, 前半生專注於數學, 發現了拓樸、代數與分析中多個經典定理, 以同緯象定理、奇妙方陣爲代表。弗賴登塔爾在學術生涯後半段投身數學教育, 提出再創造與數學化理論。以兩次世界大戰之間的德國數學與荷蘭數學爲背景, 評介弗賴登塔爾在拓樸與李群、李代數上的洞察力, 解析其學術轉向, 述評其數學認知, 反思他對數學教與學的創見。

關鍵字: 弗賴登塔爾、同緯象定理、奇妙方陣、再創造、數學化。



漢斯·弗賴登塔爾
(H. Freudenthal)
(1905～1990)

在數學和教育領域均有涉獵的學者不在少數, 但在兩個領域都取得標誌性成果, 並開宗立派的少之又少。締造德國哥廷根數學麥加的菲利克斯 · 克萊因 (F. Klein), 在荷蘭數學史上留下深刻印記的漢斯·弗賴登塔爾 (H. Freudenthal), 便是兩位典型。對於數學教育, 在 20 世紀上半葉是克萊因做出了不朽功績, 在下半葉是弗賴登塔爾取得了卓越成就。[1]

弗賴登塔爾的兩個身份, 教育家似乎比數學家的知名度更高。但在數學各分支廣泛而深入的研究, 是他研究數學教育的先決條件, 對數學教育的興趣在其數學生涯早期已播下種子。除了數學與數學教育, 在文學、歷史與哲學等領域亦能發現弗賴登塔爾：二戰逃亡期間借名寫小說獲獎謀生[2]、研究數學史並爲《科學傳記辭典》(Dictionary of Scientific Biography, 簡稱 DSB) 撰寫若干詞條、深入數學哲學並發明宇宙語言用於宇宙交流 [3]。

60 年代之前, 弗賴登塔爾在拓樸學、泛函分析以及李群、李代數等方向深耕, 之後其精力主要放在數學教育。研究方向的轉移並不突兀, 弗賴登塔爾轉向數學教育, 源於布勞威爾 (L. E. J. Brouwer)、範·丹齊格 (D. van Dantzig)、阿凡娜斯耶娃 (T. Ehrenfest-Afanassjewa) 以

及妻子盧特爾 (S. J. C. Freudenthal-Lutter) 等人的影響。兩個階段並非沒有交集, 弗賴登塔爾在不停洞察數學各分支的聯繫之時, 對數學本質的反思在教育領域得到了實踐的檢驗。「再創造」與「數學化」是弗賴登塔爾研究數學半生後, 回到數學出發點的深刻反思。

1. 從柏林到阿姆斯特丹：名師出高徒

少年弗賴登塔爾喜歡下棋和閱讀, 並對相對論、哲學、電影、戲劇以及建築感興趣, 這與他日後廣泛的研究興趣頗爲相似。進入大學前, 12歲就熟知微積分的弗賴登塔爾雖頗具天賦, 但還沒有暮年時那種數學認知, 對數學究竟是什麼感到困惑:

那時我不曾有過數學可以通過自己創造的想法, 這與課堂內外接觸數學的方式相關。重要的是, 9 歲那年我確信今後學數學。但在小鎮內外沒人能告訴我數學究竟是什麼, 除了我在書中接觸到的。[4]

1923年弗賴登塔爾註冊爲柏林大學的學生。洪堡 (W. von Humboldt) 開創的這所大學, 是歷史上第一所現代化大學。柏林大學模式是全世界大學的樣板, 1810~1870 年在整個德意志區域, 便有 80 多所新舊大學按此模式新建和重建。[5] 在洪堡的倡導下, 上大課 (Vorlesung) 和討論課 (Seminar) 是德國大學的兩種教學法, 後者比例佔到三分之二。學生學習有充分的自由, 沒有所謂的教學大綱、必修課與選修課。在寬進嚴出的柏林大學, 學生既可獨立從事研究, 也可與同學結伴討論。[6]

柏林大學的數學雖比不過鼎盛時期的哥廷根大學, 但它在 20 世紀 20 年代依舊強勁, 師資與課程豐富且學術氛圍自由。比伯巴赫 (L. Bieberbach) 開設解析幾何, 米塞斯 (R. von Mises) 開設射影幾何, 施密特 (E. Schmidt) 開設希爾伯特空間, 舒爾 (I. Schur) 開設抽象代數。除了知名教授坐鎮, 還有已嶄露頭角的無薪講師霍普夫 (H. Hopf) 開設拓樸學, 馮·諾伊曼 (J. von Neumann) 開設泛函分析與數學基礎, 洛納 (C. Loewner) 開設微分學與積分學。[7]

霍普夫的代數拓樸課, 和洛納的連續群 (Continuous Group) 課, 激發了弗賴登塔爾的兩個主要研究方向。([7], p.1) 施密特的助手費格爾 (G. Feigl) 不僅給新生講課, 還主持數學物理俱樂部, 他在弗賴登塔爾眼中是睿智的輔導老師。[8]

除了霍普夫充滿新思想的課程, 通信亦是兩人保持數學交流的重要手段。霍普夫在研究 S^3 到 S^2 的映射的構造問題時, 曾把關鍵的「不可縮性」之證明在 1928 年寄給弗賴登塔爾的一封信中描述過, 弗賴登塔爾對此問題同樣感興趣。[9] 弗賴登塔爾將拓樸作爲研究領域, 即爲霍普夫的影響, 亦有施密特所起的作用。

施密特和亞歷山大 (J. W. Alexander) 是最早理解布勞威爾拓樸學研究的一批人, 並積極傳播其拓樸學思想。霍普夫 20 世紀 60 年代曾回憶, 他與拓樸的第一次接觸是在 1917 年施密特的課上。施密特當時講解的是布勞威爾的維數不變性證明。當施密特轉入柏林大學後, 在其影響下的許多年輕人都開始對拓樸感興趣。([8], p.1011)

弗賴登塔爾在霍普夫指導下完成的博士論文《拓樸空間與拓樸群的邊界》(Über die Enden topologischer Räume und Gruppen), 首次引入了邊界的定義, 主要結論是: 一個拓樸群或者齊性空間只能有 1、2 或者無窮多個邊界。此後這篇論文被大量引用, 霍普夫 1943 年利用弗賴登塔爾論文結論中的一個應用, 依靠群在合適的拓樸空間上的作用, 引入了有限生成的離散群的邊界。兩年後, 弗賴登塔爾又以幾何群論的方式更直接地構造了霍普夫的邊界。由此可見師生之間密切的學術影響, 這在兩人的通信中很常見。

還有一個機遇, 便是 1927 年布勞威爾在柏林大學開設的直覺主義課程。在洛納的構造分析課上曾瞭解過相關思想, 既懂拓樸又熟悉直覺主義數學的弗賴登塔爾受到布勞威爾的賞識, 博士畢業後有了到荷蘭跟隨布勞威爾做研究的機會。

初到荷蘭的弗賴登塔爾過得並不順心, 現實與在德國的經歷相比, 讓他有些水土不服。阿姆斯特丹大學在弗賴登塔爾看來是沒有跟上數學發展潮流的:

其一, 師資力量薄弱。阿姆斯特丹大學只能與德國規模較小的大學相提並論, 除了布勞威爾, 其餘的數學教授對現代數學不夠瞭解。

其二, 課程內容陳舊。由於布勞威爾的存在, 荷蘭可視作現代拓樸的誕生地, 但拓樸學在這裡居然不在數學課程計劃中。

其三, 學生的接受能力與較窄的知識面。荷蘭學生整體來講比同期德國學生的水平低, 弗賴登塔爾計劃開設拓樸學討論班時, 竟然沒有學生對拓樸學有所瞭解。[10]

雖然布勞威爾的精力集中在直覺主義上, 無暇顧及拓樸學[1], 但弗賴登塔爾在荷蘭遇到了年齡相仿的胡列維茨 (W. Hurewicz), 這改變了他的數學生涯。

2. 數學生涯轉折點：結識胡列維茨

1930~1931年, 弗賴登塔爾來阿姆斯特丹擔任布勞威爾助手時, 胡列維茨已在這裡工作了四年。兩人均是無薪講師, 據弗賴登塔爾所述, 胡列維茨在討論班上講述過其師弟哥德爾 (K. Gödel) 的不完備性定理。

不同於門格爾 (K. Menger) 與布勞威爾的「維數論之爭」, 弗賴登塔爾與胡列維茨的合作十分融洽, 是值得效仿的榜樣。參照在柏林大學的經歷, 弗賴登塔爾認爲阿姆斯特丹大學的數學課程有不少改進空間, 他積極嘗試革新原有課程, 以先進課程激發這裡的學生。擅長拓樸的助手亞歷山德羅夫 (P. Alexandroff) 和門格爾離開荷蘭後, 開設拓樸課程只能依靠胡列維茨和弗賴登塔爾。兩人從拓樸的基礎課程講起, 胡列維茨講解一般拓樸, 弗賴登塔爾講解組合拓樸, 他們還在布勞威爾建議下組織拓樸討論班。([10], p.606)《展開、壓縮、等距》(Dehnungen, Verkürzungen, Isometrien) 就是兩人合作完成的。

---

[1] 布勞威爾在博士期間就已密切注意數學基礎問題, 從 1913 年開始他的注意力不再放在拓樸學, 而轉向直覺主義數學哲學。後來布勞威爾從其直覺主義思想出發, 否定了他的一些拓樸學研究的可靠性。

在同倫理論中, 胡列維茨從龐加萊的基本群思想, 不僅歸納出高維同倫群的定義, 而且系統研究了其性質以及與同調群的聯繫, 這是同倫理論快速發展的起點。胡列維茨在1935～1936年的4篇系列簡報的第1篇, 爲文中第四部分 — 拓樸群的「定理 VII」之前半部分補充了腳注8a, 以說明正是弗賴登塔爾使他關注到這個事實。在第 3 篇, 胡列維茨在腳注 15a 中, 指出引用了弗賴登塔爾的文章「Freudenthal, Comp. Math. 2, p.134.」, 並說明使用的是弗賴登塔爾的術語。

胡列維茨與弗賴登塔爾的相互影響, 是荷蘭成爲拓樸學重鎮的保證。布勞威爾的設想是將阿姆斯特丹打造成第二個哥廷根, 爲此他招募了不少青年數學家中的希望之星, 其中之一便是弗賴登塔爾。[11] 布勞威爾對胡列維茨亦有很高的評價, 認爲他未來會是第二個黎曼或龐加萊[12]。

弗賴登塔爾表示是因爲胡列維茨的影響, 自己的科學知識才得以充分施展, 而沒有被帶進墳墓。[13] 1936 年胡列維茨前往美國, 弗賴登塔爾成了阿姆斯特丹通曉現代數學的唯一代表。《科學傳記詞典》 介紹胡列維茨的詞條[14], 正是由弗賴登塔爾撰寫的, 可見他對胡列維茨的生平和數學十分瞭解。這種熟悉催生了同緯象定理 (The Freudenthal Suspension Theorem)。

3. 計算高維同倫群: 同緯象定理

球面同倫群是研究保持基點的球面映射同倫類 $[S^m, S^n]$。根據 m 與 n 的大小, 可分 3類:

1. m 小於 n, $[S^m, S^n] = 0$,
2. m 等於 n, $[S^m, S^n] \cong Z$,
3. m 大於 n, $[S^m, S^n] = S^n$ 的 m 維同倫群。[15]

第 2 類, 可由胡列維茨同構定理得出。第 3 類「S^n 的 m 維同倫群」的計算是特別困難的。除了 n 取 1 時, $[S^m, S^1] = 0$ 易得, S^n 的 m 維同倫群在計算上的每一步推進都備受矚目。弗賴登塔爾同緯象定理, 亦稱雙角錐定理, 是針對球面同倫群發揮過重要作用的定理:

設 $E : \pi_n(S^m) \to \pi_{n+1}(S^{m+1})$ 爲同緯象同態, m 大於等於 1, 那麼:

當 n 大於等於 1、小於 $2m-1$ 時, E是同構;

當 n 等於 $2m-1$ 時, E 是在上同態, 即 E是滿射。[16]

弗賴登塔爾對高維同倫群的認識, 源於他對胡列維茨 4 篇系列簡報的理解。對此弗賴登塔爾在《球面映射的類》 (Über die Klassen der Sphärenabbildungen I. Große Dimensionen, 1937) 的第一段開門見山:

本文是關於研究對象 — 球面上映射的象的系列研究。成果是在胡列維茨的同倫群上得到的。([7], p.133)

表1:《球面映射的類》的結構框架

<table>
<tr><th>小節標題</th><th>備注</th></tr>
<tr><td>1. 同倫群</td><td rowspan="2">把胡列維茨關於同倫群的簡報 1 中的研究具體化到球面同倫群情形</td></tr>
<tr><td>2. 球面的同倫群</td></tr>
<tr><td>3. 同緯映射</td><td rowspan="2">證明同緯象定理的2個主要工具</td></tr>
<tr><td>4. 霍普夫不變量</td></tr>
<tr><td>5. 引理</td><td></td></tr>
<tr><td>6. 引理的證明</td><td></td></tr>
<tr><td>7. 定理 I 的證明</td><td rowspan="4">現代拓樸教科書中同緯象定理的原始出處</td></tr>
<tr><td>8. 證明定理 II 與 III 之前的準備</td></tr>
<tr><td>9. 定理 II 的證明</td></tr>
<tr><td>10. 定理 III 的證明</td></tr>
</table>

文中的關鍵是球面的同緯映射。想像地球 S^2 與其赤道 S^1 的聯繫, 可考慮把 S^n 添加上南北兩極並由經線連接, 便可得到 S^{n+1}。將 $f: S^p \to S^m$ 做同緯構造, 可得到同緯映射 $sf: S^{p+1} \to S^{m+1}$, 進而可以定義一個同態 $E: \pi_n(S^m) \to \pi_{n+1}(S^{m+1})$, 其中 E 把 $[f]$ 映到 $[sf]$。([15], p.435) 這便是弗賴登塔爾同緯象定理中的同緯象同態。

對先前重點提到的第 3 類 — $\pi_{n+i}(S^n)$ 類型的同倫群 ($n+i$ 大於 n), 當 $n+i$ 小於 $2n-1$ 時 (即 n 大於 $i+1$), 連續應用同緯象定理中的同構之結論, 便可得到一系列同構的同倫群:

$$\pi_{n+i}(S^n)、\pi_{n+i+1}(S^{n+1})、\pi_{n+i+2}(S^{n+2})\cdots$$

這些同構的同倫群, 在 i 固定時, 正是「i 次穩定同倫群 G_i」。穩定同倫群可能是代數拓樸第一個表現出穩定性現象的例子 ([7], p.636), 自發現後便吸引了數學家的目光, 不少謎團至今未解決。21 世紀初依然有相關著作不停問世, 如拉夫納爾 (D. C. Ravenel) 的《複配邊與球面的穩定同倫群》(Complex Cobordism and Stable Homotopy Groups of Spheres, 2004)。

弗賴登塔爾的同緯映射爲同倫理論開闢了新方向： 將不同維球面的不同維同倫群聯繫起來、發現穩定同倫範疇、研究同倫與同調的關係。([15], p.435) 懷特海 (J. H. C. Whitehead) 在《關於同緯象的註記》(Note on Suspension, 1950) 指出, 同緯象方法是計算空間同倫群的有效方法之一[17]。在弗賴登塔爾影響下, 催生了一批與同緯象相關的研究:

表2: 同緯象的相關研究

作者	論文題目	出處
G. W. Whitehead	On the Homotopy Groups of Spheres and Rotation Groups	*Ann. of Math.*, 1942
G. W. Whitehead	On Products in Homotopy Groups	*Ann. of Math.*, 1946
P. J. Hilton	Suspension Theorems and the Generalized Hopf Invariant	*Proc. London Math. Soc.*, 1951
G. W. Whitehead	On the Freudenthal Theorems	*Ann. of Math.*, 1953
I. M. James	The Suspension Triad of a Sphere	*Ann. of Math.*, 1956
I. M. James	On the Suspension Sequence	*Ann. of Math.*, 1957

雖然霍普夫不在荷蘭, 但是他與弗賴登塔爾在信中探討的數學問題, 特別是霍普夫不變量, 能給弗賴登塔爾帶來新的啓發。[18] 全文 26 條腳註, 參考文獻除了胡列維茨的文章, 便是霍普夫的論著。

穩定同倫群的計算在同緯象出現後成了熱點。20 世紀 40 年代, 龐特里亞金 (L. Pontryagin) 以及懷特海 (G. W. Whitehead) 對 G_2 展開了計算, 前者還在這個問題上出現過失誤。問題在 50 年代迎來了大突破 : 法國數學家塞爾 (J.-P. Serre) 在博士論文中, 用勒雷 (J. Leray) 於 1945 年引入的譜序列, 計算出了 G_3、G_4、G_5、G_6、G_7、G_8 的正確結果。([15], p.437) 這是塞爾 1954 年獲得菲爾茲獎的主要原因。

4. 轉向李群、李代數 : 例外李群與奇妙方陣

弗賴登塔爾並沒有在代數拓樸停留多久, 而是將關注點轉向了現代數學的又一核心領域 — 李群、李代數。這次轉向是有預示的:

其一, 弗賴登塔爾在柏林大學上過洛納的連續群課程, 他曾回憶道「柏林大學是 1930 年代少有的能開設李群課程的大學」[19]。

其二, 二戰後弗賴登塔爾離開阿姆斯特丹大學, 接受了烏德勒支大學的幾何學教席, 他教授了多年射影幾何。集中在李群及其相關的幾何問題, 逐步形成了「烏德勒支學派」[20]。

其三, 弗賴登塔爾深入研究過希爾伯特的《幾何基礎》, 熟知克萊因的埃爾朗根綱領, 這些都與例外李群的緣起密切相關。

李群既是群, 又是解析流形, 而且群的運算是解析的。此流形在群的單位處的切空間就是這個李群的李代數, 李代數可視爲李群的局部結構。[21] 幾何結構與群結構同時起作用又相互制約, 使李群具有複雜而奇妙的性質, 奇妙方陣便揭示了例外李群幾何學的這一特徵。

1889 年基靈 (W. Killing) 的千古一文與 1894 年嘉當 (É. Cartan) 的博士論文, 完成了複數域上有限維單李代數的分類 (n 大於 2)：$A_n, B_n, C_n, D_n, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$。每個複單李代數同構於其中之一, 所有單李群可分爲四大典型群 $\{A_n, B_n, C_n, D_n\}$ 和五個例外單李群 $\{G_2, F_4, E_6, E_7, E_8\}$。$A$ 類典型群可描述爲複埃爾米特空間的等距群, B 類典型群可描述爲奇數維歐幾里得空間的等距群, C 類典型群可描述爲埃爾米特四元數空間的等距群, D 類典型群可描述爲偶數維歐幾里得空間的等距群。因此典型群可統一描述爲 $\mathbb{R}$ (歐幾里得) 空間、$\mathbb{C}$ 空間和 $\mathbb{H}$ (四元數) 空間的等距群。[22] 但是五個例外的單李群究竟是何方神聖? 它們與超複數系 $\mathbb{C}$、$\mathbb{H}$ 是否也有類似的關係? 弗賴登塔爾和蒂茨 (J. Tits) 的研究表明：這些群與 $\mathbb{O}$ (八元數) 平面的等距有關。首先指出例外李群和八元數之間聯繫的是嘉當 (1908 年), 他發現 14 維群 G_2 是 $\mathbb{O}$ 的自同構群。

實數系和複數系都構成域, 滿足乘法的交換律和結合律。四元數代數不滿足乘法交換律, 而八元數代數, 乘法的交換律和結合律皆不滿足。儘管缺少域的某些性質, 四元數和八元數仍可以用作射影平面的坐標。但八元數代數中結合性的缺乏不允許構造任意維的一個空間, 因此對應於群的無限序列不可能出現。([22], p. 117) 起因於 $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 和 $\mathbb{H}$ 坐標空間的典型李代數家族是無限的, 因爲典型空間可以有任意的維數。八元數則不然, 它並不能支撐起維數大於等於 3 的射影空間。五個例外李代數和它們的群, 是跟 $\mathbb{O}$ 以及八元數射影平面 $\mathbb{OP}^2$ 聯繫著的, 例如: $\mathbb{OP}^2$ 有兩個天然的交換群, 保持長度的變換群 F_4 和保持直線的變換群 E_6, 而群 E_7 和 E_8 雖然複雜, 但也源自 $\mathbb{OP}^2$。[23]

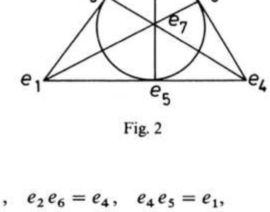


Fig. 2

$e_1e_3 = e_2$, $e_2e_6 = e_4$, $e_4e_5 = e_1$,
$e_3e_6 = e_5$,
$e_1e_7 = e_6$, $e_2e_7 = e_5$, $e_4e_7 = e_5$.

圖1: 弗賴登塔爾圖

《八元數、例外群和八元數幾何學》(Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie, 1951) 是弗賴登塔爾首次發表的八元數、例外群及其關係的研究。文章一方面構造了非結合八元可除代數上的射影平面, 另一方面討論該射影平面的自同構群, 得出「它是 E_6 型實李群」和「F_4 型緊李群可視爲該射影平面的橢圓型群」之類的結論。文中的「弗賴登塔爾圖」([23], p.344), 形象描述了八元數的單位元乘積以及其非交換、非結合與交錯性。

上述文章開啓了 1954～1963 年弗賴登塔爾對 E_7 和 E_8 的研究, 發表了總標題爲《E_7、E_8 與八元數平面的關係》(Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene) 的 11 篇文

章。文章旨在解決一個核心問題: 構造那些自同構群是例外型李群 F_4、E_6、E_7、E_8 的幾何, 孕育了極具啓發性的「奇妙方陣」(Magic Square)。

	$\mathscr{H}_1$	$\mathscr{H}_2$	$\mathscr{H}_4$	$\mathscr{H}_8$
2-dim elliptic geometry:	B_1	A_2	C_3	F_4
2-dim projective geometry:	A_2	$A_2 + A_2$	A_5	E_6
5-dim symplectic geometry:	C_3	A_5	D_6	E_7
metasymplectic geometry:	F_4	E_6	E_7	E_8

圖 2: 奇妙方陣

四列從左到右標注實數上的4個可除代數: $\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$、$\mathbb{H}$、$\mathbb{O}$, 四行從上到下標注幾種幾何：2 維橢圓幾何、2 維射影幾何、5 維辛幾何 $\cdots$ 奇妙方陣的奇妙在於：除了 G_2, 行與列的交匯處覆蓋了所有的例外型李群, 它恰好是指定可除代數上的幾何的自同構群, 並且該方陣關於對角線對稱。四個例外李群分布在八元數所在的第四列, 可用同一種幾何處理。奇妙方陣提供了一種途徑去驗證數學家的設想：例外李群的存在性是源於八元數。弗賴登塔爾的《幾何基礎中的李群》(Lie Groups in the Foundations of Geometry, 1964) 系統回顧了李群與幾何學的歷史, 還介紹了蒂茨幾何學。([7], pp.618-624) 與蒂茨[2]的交流對弗賴登塔爾影響很大, 蒂茨的廈理論 (Tits Buildings) 在更大範圍研究了例外李群的幾何。奇妙方陣在數學和理論物理中的熱度至今依舊不減, 如蘭茲伯格 (J. M. Landsberg) 與馬尼威爾 (L. Manivel) 的《弗賴登塔爾奇妙方陣的射影幾何》(The Projective Geometry of Freudenthal's Magic Square, 2001), 借助奇妙方陣在代數幾何與表示論之間建立了新聯繫[24]。

5. 投身數學教育

熟悉其數學成就只能瞭解弗賴登塔爾的一半人生, 另一半充滿了對數學教育的反思。弗賴登塔爾的教育智慧緣何而起? 他爲何會關注數學教育?

首先, 妻子盧特爾對教育非常感興趣。她鼓勵丈夫從他們的孩子入手, 講解算術, 這加深了弗賴登塔爾對數學教育的興趣。弗賴登塔爾觀察小孩子如何學算術, 並研究了很多算術教學法的書籍。他曾回憶道, 兩人一起從事教育工作時, 妻子第一個建議他從理論上研究教育。

其次, 如弗賴登塔爾所言, 從教育角度去闡述數學, 他受到了布勞威爾的數學觀點 (而非其教育觀點) 影響。他堅信的「數學是人類的一種活動」, 與布勞威爾的直覺主義, 在某些思路上是一致的。

再次, 範 · 丹齊格的影響。弗賴登塔爾來荷蘭前讀過兩篇範 · 丹齊格的數學教學文章, 他在

[2]蒂茨 (1932～2021), 法國數學家, 沃爾夫獎與阿貝爾獎得主, 其 BN 對掀起群和幾何關係的二次革命。

自傳中表示, 曾在 30 年代早期與後者探討過荷蘭數學教學現狀。數學化的觀點在範·丹齊格那裡也能找到線索。

最後, 阿凡娜斯耶娃的影響。阿凡娜斯耶娃的《幾何學導論的練習匯編》(Uebensammlung zu einer geometrischen Propädeuse) 對弗賴登塔爾幫助很大, 後者稱之爲傑作。弗賴登塔爾曾解釋道, 通過課上學習以及與她們探討, 他研究了阿凡娜斯耶娃及其追隨者的工作, 指導下再創造的靈感由此而來。[25]

數學在某種程度上非黑即白, 而數學教育屬於多學科交叉。這意味著在數學教育領域, 問題答案可能不唯一, 相關爭論也更多。弗賴登塔爾的數學教育之路並非一帆風順, 他首先遇到的挑戰是在國際上引得爭先效仿的「新數學運動」。

6. 對新數學運動與布爾巴基結構主義的態度

新數學運動始於50年代中期的美國。起初是個別院校和老師的改革嘗試, 後來在全世界形成規模影響, 誘因是二戰後美蘇對峙。[26], 1957 年蘇聯衛星上天, 如何改進數學教學以培養超越蘇聯的科技人才, 是美國學界爭論的熱點。

新數學運動的教材有三新。新內容：引入包含集合運算符號以及集合之間映射在內的初等集合論, 利用布爾巴基的結構觀點介紹向量空間、矩陣代數以及群環域等抽象概念, 講授微積分初步知識, 增加概率統計以及電子計算機算法語言。新體系：集合、函數、變換、結構成了數學內容的線索, 幾何學代數化, 三角、代數、幾何的分科數學不復存在。新處理: 加強趣味性, 強調直覺而不崇尚技巧, 用流向圖解方程以訓練思維, 崇尚讓學生自己去發現定理。[27]

布爾巴基的思想, 間接成了新數學的主導思想[3]。極大影響 20 世紀數學的法國布爾巴基學派, 發明了數學結構的概念, 提出全部數學基於三種母結構：代數結構、序結構和拓樸結構。在集合論基礎上, 通過結構梳理傳統數學分支, 布爾巴基編寫了多卷《數學原理》, 試圖用結構來統一數學。在重寫數學基礎的道路上, 布爾巴基貫徹著三大哲學要素 — 數學統一性、公理化與結構觀念。[28] 布爾巴基的領袖之一迪厄多內 (J. Dieudonné) 也捲入了新數學的論戰之中, 他在羅亞蒙會議發出過針對幾何教育的宣言：打倒歐幾里得![4]

對於新數學, 起初弗賴登塔爾並沒站在絕對的對立面。從模糊到清晰, 在新數學對中小學數學的負面影響逐漸顯露時, 弗賴登塔爾幾乎憑一己之力的堅持, 使荷蘭數學教育未被波及。事後他深刻反思:

學習者的洞察有被教師、教科書作者和成熟數學家的洞察代替的傾向 ··· 新數學錯誤的觀點, 是用成熟數學家的洞察代替學習者的洞察 ··· 新的程序、新的教學材料、新的課程, 都是在辦公桌後面設計的, 在專題會上討論的, 作爲急需材料推進教室。[29]

---

[3]作爲群體, 布爾巴基並沒參與新數學的改革與辯論, 可參考《布爾巴基：數學家的秘密社團》。

[4]羅亞蒙會議是新數學歷程中的一次重要事件, 弗賴登塔爾認爲沒參加該會議是個錯誤, 沒能及時反對新數學的大規模啓動。他解讀過迪厄多內這個有爭議的口號, 認爲是誤解。

對於布爾巴基與結構主義, 弗賴登塔爾在數學上也曾誇讚, 在教育上更多是對其過於理想而脫離現實的批評:

儘管他們的工作要求大創新, 但從原則上說, 最終也只是對現有數學的演繹整理。布爾巴基的工作是不朽的系統工程, 儘管其要點已過時, 但對數學發展是有巨大貢獻的 ··· 本世紀 60-70 年代, 在新數學名義下, 結構主義被大肆宣傳。但錯誤的觀點很快變得淸楚了, 從簡單結構到豐富結構, 這一觀點是形成真正數學化的障礙 ··· 結構世界與學習者生活的世界沒有共同之處。它是象牙塔中的數學教學, 遠離世界和社會。([29], pp.34-184)

對於抽象集合過早進入中小學課堂, 弗賴登塔爾強烈反對並稱罪魁禍首是新數學:

新數學引入字母集合。理由顯然, 人們不知什麼是集合, 也不知集合在真正數學中的作用, 因此他們不得不編造集合和集合應用的例子。但不能用數集, 因爲數必須由集合引入, 剩下的只有字母集合可用 ··· 罪魁禍首是新數學, 上面所引的書就是新潮流的例子, 作者未注意到數學中存在變量, 也沒注意到變量是用字母表示的 ··· 新數學與傳統割裂, 自以爲高深的集合論是26個字母的無意義遊戲。([19], pp.226-250)

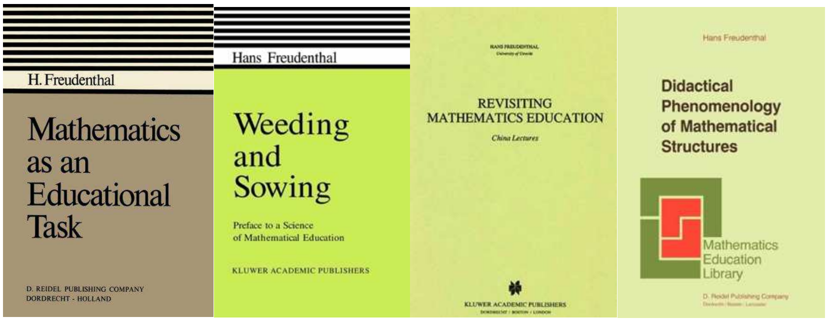


圖3: 弗賴登塔爾的 4 本數學教育代表作

7.「有指導的再創造」與「數學化」

什麼樣的老師是好老師? 弗賴登塔爾不認同傳統的「老師講 — 學生聽」, 這樣沒給學生機會, 屬於教師個人表演, 並稱爲「TV 模式」。弗賴登塔爾曾在大學生中調研, 發現這種模式令中學生養成壞習慣而無法適應大學:

我們接觸了一些一年級大學生, 讓他們評價中學數學教師。所有學生欣賞的教師是會將問題解釋淸楚, 他們認爲好教師應該講得多、容易聽懂、對每類問題都能舉出例子 ··· 一年級大學生經常抱怨我們在課上沒有足夠的解釋 ··· 到二年級末, 學生還要求更多講解, 必須抵制這種要求。我們經歷過多次, 講得愈多, 解釋得愈細, 學生的成績下降得愈快, 對題材稍作推廣就導致緊張 ··· 傳統教室是否會妨礙學生主動學習? 黑板與座位安排是否會使學生眼睛必然被

引向教師的講解, 因而只能被動聽[5]? 我相信大多數學校必須改組教學, 以保證學習只能是主動學, 而不能被動學。([19], pp.57-61)

如何變被動爲主動? 弗賴登塔爾強調, 自然而有效的數學學習方法是「有指導的再創造」: 由學生本人把要學的東西親自創造或發現出來, 教師引導和幫助學生去完成這種再創造, 不應將知識體系強行灌輸給學生。這背後需要的是「微妙平衡」:

因爲指導再創造意味著在創造的自由和指導的約束之間, 以及在學生獲得樂趣和滿足教師要求之間, 達到一種微妙平衡, 所以答案不是那麼簡單。而且, 自由選擇已被再創造的再限制了。學生可以創造一些對他來說是新的, 而對指導者是熟知的東西。([29], p.67)

弗賴登塔爾堅持再創造的觀點, 一方面他認爲歷史已告訴我們數學是怎樣創造的, 讓數學發展歷程在學生身上重現才符合認知規律。這並不意味著要學生重走數學發展的曲折道路, 而是通過再創造令學生體會到: 假設歷史上的人們具有了現代的知識, 他們是如何將知識創造出來的。另一方面弗賴登塔爾貫徹的「數學是一種活動」意味著: 應在做數學的過程中學數學, 即在創造數學的過程中學數學。至於創造數學, 他指出搞數學的人就是用再創造的方式去研讀論文的。學生和數學家應被同樣看待, 可通過再創造來學數學。

教師應該往哪裡指導再創造的學生? 到數學化的各個方面中去:

既然我強調數學是一種活動, 所以對往哪兒指導的回答是到一種活動中去。學生應該再創造數學化而不是數學, 抽象化而不是抽象, 圖式化而不是圖式, 形式化而不是形式, 算法化而不是算法。([29], p.68)

數學化的「化」, 應由學生積極主動去實現, 而非教師或外界力量強加。教師須特別注意數學化的過程, 讓學生養成自我獲取數學的意識, 鼓勵學生構建自己的知識體系。

數學化也分橫向與縱向, 兩者的應用場景是現實生活世界與抽象符號世界, 界限是模糊的。以犧牲一個爲代價, 可互爲擴張與縮小。在教與學的過程中, 數學化的橫向與縱向區別依賴於特定情境, 應相互滲透並彌補彼此的不足。

8. 結語

在拓樸上, 弗賴登塔爾師從霍普夫, 又借助胡列維茨的同倫群研究, 師友之間的緊密聯繫是他證明同緯象定理的關鍵。在塞爾的突破到來前, 同倫群的計算困難迎來了第一縷曙光。

在李群、李代數上, 從超複數出發, 依靠奇妙方陣和廈理論, 弗賴登塔爾與蒂茨揭示了例外李群與超複數系的神秘關係網。兩人的工作引發了數學和物理學中的「八元數繁榮」, 這是布爾巴基未曾預見的。([22], p.117)

轉向數學教育, 再創造與數學化是一位數學家在數學世界耕耘多年後, 洞察了研究數學與

---

[5]弗賴登塔爾 1987 年在華東師大演講, 走上講台便說:「荷蘭中學教室的桌椅擺放都是圍成一圈, 老師在學生中間活動。假如有學校像今天這樣擺放桌椅, 前面是講台, 下面是排排桌椅, 那校長大概要被撤職了。」

學習數學的本質, 對如何學好數學的深刻反思。這有助於解決「火熱的思考」與「冰冷的美麗」之間的鴻溝:

沒有一種數學思想, 是以它被發現時的樣子公開的。問題被解決後, 相應地發展爲形式化技巧。求解過程被扔在一邊, 火熱的發明就變成了冰冷的美麗。[30]

弗賴登塔爾的理念不一定是萬能的, 但再創造與數學化值得素質教育認真借鑒。在不同地區實踐他的教育思想可能會面臨不同的問題, 關鍵是是否有具備這種洞察力的學者, 對各國各地區的數學教育作出符合實際的反思與改革。數學教育家張奠宙對弗賴登塔爾的評價十分中肯:

他並不是說空話, 現在我們很多教育家空話連篇, 具體案例沒有。他的案例不是小孩子玩遊戲那種東西, 他有深刻內涵在裡頭 ··· 現在教育文章看起來要麼就看不懂, 要麼就漂亮話漂亮得不得了 ··· 我覺得教育不能光說漂亮話。弗賴登塔爾不是說這種漂亮話的人, 他是實實在在地尋找一些規律。[31]

弗賴登塔爾爲國際數學教育界的組織付出了巨大努力, 類似國際數學家大會的國際數學教育大會便由此而來。他於 1967∼1970 年擔任國際數學教育委員會主席, 創辦了《數學教育研究》雜誌。爲紀念弗賴登塔爾的貢獻, 除了克萊因獎, 國際數學教育委員會還成立了「弗賴登塔爾獎」, 獎勵過去十年提出並踐行了「有深度、新穎、有持續影響力」的研究項目的傑出學者。

弗賴登塔爾的博士範 · 埃斯特 (W. T. van Est) 的總結, 恰是他博學一生的真實寫照:

世上有很多科學家和學者, 弗賴登塔爾則是學者。學者中有人是在科學世界與世隔絕地研究, 有人的研究則遠超出範圍。弗賴登塔爾屬於後者, 他是極其少有的, 能以數學爲主將一大片知識領域融爲一體的學者。([4], p.39)

備註: 本文系國家自然科學基金青年項目 (編號：12501002) 與北京師範大學人才引進科研基金項目 (編號：12900-310432116) 的研究成果。

参考文獻

1. G. Howson, Hans Freudenthal and the Foundation of a Discipline of Mathematics Education. *Nieuwe Wiskrant*, **5**(1985), 68-72.
2. J. J. O'Connor and E. F. Robertson, Hans Freudenthal Biography. `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Freudenthal/`. 2000-7.
3. H. Freudenthal, *Lincos : Design of a Language for Cosmic Intercourse*, Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1960.
4. S. La Bastide-van Gemert, *All Positive Action Starts with Criticism: Hans Freudenthal and the Didactics of Mathematics*. Dordrecht: Springer, 2015.
5. 李工真。德意志現代化進程與德意志知識界。北京: 商務印書館, 2010。
6. 李工真。大學現代化之路。北京：商務印書館, 2013。
7. H. Freudenthal, *Hans Freudenthal: Selecta*. Zürich: European Mathematical Society, 2009.

8. W. T. van Est, Hans Freudenthal, *History of Topology.* North-Holland: Elsevier, 1999.
9. H. Samelson, $\pi_3(S^2)$, *H. Hopf, W. K. Clifford, F. Klein // History of Topology.* North-Holland: Elsevier, 1999.
10. D. van Dalen, L. E. J. Brouwer, *Topologist, Intuitionist, Philosopher: How Mathematics is Rooted in Life.* London: Springer-Verlag, 2013.
11. H. J. A. Duparc and A. W. Grootendorst, *Historical Survey//Two Decades of Mathematics in the Netherlands* (1920-1940): *A Retrospection on the Occasion of the Bicentennial of the Wiskundig Genootschap* (Part I). Amsterdam: Mathematical Centre, 1978.
12. I. M. James, *Some Topologists//History of Topology.* North-Holland: Elsevier, 1999.
13. H. Freudenthal, *Schrijf dat op, Hans. Knipsels uit een leven.* Amsterdam: Meulenhoff Informatief, 1987.
14. H. Freudenthal, *Hurewicz, Witold//Dictionary of Scientific Biography* (Volume17). New York: Simon & Schuster Macmillan, 1990.
15. 胡作玄, 鄧明立。20 世紀數學思想。濟南：山東教育出版社, 1999。
16. 廖山濤, 劉旺金。同倫論基礎。北京：北京大學出版社, 1980。
17. J. H. C. Whitehead, *Note on Suspension//The Mathematical Works of J. H. C. Whitehead* (Volume II Complexes and Manifolds). Oxford: Pergamon Press, 1962.
18. 胡作玄。霍普夫//世界著名數學家傳記。北京：科學出版社, 1995。
19. 陳昌平, 唐瑞芬等 (編譯)。作爲教育任務的數學。上海：上海教育出版社, 1995。(H. Freudenthal, 1973)
20. W. T. van Est, *Hans Freudenthal* (17 September 1905-13 October 1990) // *The Legacy of Hans Freudenthal.* Dordrecht : Springer, 1993.
21. 孟道驥。代數之管見 — 漫談代數學習。北京：科學出版社, 2016。
22. 趙振江 (譯)。對稱的觀念在 19 世紀的演變：Klein 和 Lie。北京：高等教育出版社, 2016。(I. M. Yaglom, 1988)
23. 袁向東、馮緒寧 (譯)。數學及其歷史 (第三版)。北京：高等教育出版社, 2022。(J. Stillwell, 2010)
24. J. M. Landsberg and L. Manivel, The Projective Geometry of Freudenthal's Magic Square. *Journal of Algebra*, **239** (2001), 477-512.
25. H. J. Smid, *Formative Years: Hans Freudenthal in Prewar Amsterdam.* `https://hal.science/hal-01349232.2016-7-27`.
26. 聶必凱, 鄭庭曜, 孫偉, 蔡金法。美國現代數學教育改革。北京：人民教育出版社, 2010。
27. 丁石孫, 張祖貴。數學與教育。大連：大連理工大學出版社, 2016。
28. 胡作玄、王獻芬 (譯)。布爾巴基：數學家的秘密社團。長沙：湖南科學技術出版社, 2012。(M. Mashaal, 2006)
29. 劉意竹, 楊剛等 (譯)。數學教育再探 — 在中國的講學。上海：上海教育出版社, 1999。(H. Freudenthal, 1994)
30. 張奠宙。張奠宙數學教育隨想集。上海：華東師範大學出版社, 2013。
31. 代欽, 李春蘭。對中國數學教育的歷史和發展之若干問題的理性思考 — 對張奠宙先生的訪談錄。數學教育學報, 21(1), 23, 2012。

—本文作者任教中國北京師範大學珠海校區數學系—